**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

Сегодня мы познакомимся с ещё одним распространённым следствием [**теорем сложения и умножения вероятностей**](http://mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html), которое касается ***независимых испытаний***, и рассмотрим примеры на использование ***формулы Бернулли***.

Что такое ***независимые испытания***? Пусть производится несколько испытаний. Если вероятность появления некоего события http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image002.gif в каждом из них **не зависит** от исходов остальных испытаний, то испытания называются независимыми. При этом под словосочетанием «независимые испытания» часто подразумевают ***повторные независимые испытания*** – когда они осуществляются друг за другом.

Простейшие примеры:

– монета подбрасывается 10 раз;

– игральная кость подбрасывается 20 раз.

Совершенно ясно, что вероятность выпадения орла либо решки в любом испытании не зависит от результатов других бросков. Аналогичное утверждение, естественно, справедливо и для кубика.

А вот последовательное извлечение карт из колоды не является серией независимых испытаний – как вы помните, это цепочка [**зависимых событий**](http://mathprofi.ru/zavisimye_sobytija.html). Однако если карту каждый раз возвращать обратно, то испытания станут независимыми.

**Задача 1.** Стрелок совершает 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image004.gif. Найти вероятность того, что:

а) стрелок попадёт только один раз;

б) стрелок попадёт 2 раза.

Решение: условие сформулировано **в общем виде** и вероятность попадания в мишень при каждом выстреле считается известной. Она равна http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image004_0000.gif *(если трудно понять данные в общем виде, присвойте параметру какое-нибудь конкретное значение, например,*http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image007.gif*)*.

Коль скоро мы знаем http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image004_0001.gif, то легко найти вероятность промаха в каждом выстреле:  
http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image009.gif, то есть, «*q*» – это тоже известная нам величина.

а) Рассмотрим событие *«Стрелок попадёт только один раз»* и обозначим его вероятность через http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image011.gif *(индексы понимаются как «одно попадание из четырёх»)*.  Данное событие состоит в 4 несовместных исходах: стрелок попадёт в 1-й **или** во 2-й **или** в 3-й **или** в 4-й попытке.

По [**теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий**](http://mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):

http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image013.gif (Произведение *pqqq означает: попал 1-й раз, не попал во 2-1 раз, не попал в 3-й раз, не попал в 4-й раз. Аналогично: qpqq означает: не попал 1-й раз, попал во 2-й раз, не попал в 3-й раз, не попал в 4-й раз. И т.д.)*

Упростим результат с помощью комбинаторной [**формулы количества сочетаний**](http://mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf):  
http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image015.gif способами можно выбрать попытку, в которой стрелок попал.

И, поскольку в каждом случае имеет место 1 попадание и 3 промаха, то:  
http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image017.gif – вероятность того, что стрелок попадёт только один раз из четырёх

б) Рассмотрим событие *«Стрелок попадёт два  раза»* и обозначим его вероятность через http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image019.gif *(«два попадания из четырёх»)*. Здесь вариантов становится больше, попадания возможны:

в 1-й и 2-й попытках **или** в 1-й и 3-й попытках **или** в 1-й и 4-й попытках

**или** во 2-й и 3-й попытках **или** во 2-й и 4-й попытках **или** в 3-й и 4-й попытках.

Таким образом, по тем же [**теоремам сложения и умножения вероятностей**](http://mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):  
http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image021.gif

Можно ли так решать задачу? Безусловно, можно. Но что делать, если серия состоит из 5, 6 или большего количества выстрелов? Тут уже будут получаться десятки слагаемых, запись которых отнимет много времени и места. В этой связи рациональнее придерживаться более компактной схемы:  
http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image023.gif способами *(перечислены выше)* можно выбрать 2 попытки, в которых произойдут попадания.

И, поскольку в любом исходе ровно 2 попадания и 2 промаха, то:  
http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image025.gif – вероятность того, что стрелок попадёт 2 раза из 4.

Отве**т**: http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image027.gif.

Итак – вероятность того, что будет 1 попадание из 4, равна http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image029.gif, вероятность того, что будет 2 попадания из 4, равна http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image031.gif… не замечаете ли вы закономерности?

Только что на конкретном примере мы повторили путь Якоба Бернулли, который несколько веков назад вывел формулу, названную позже в его честь:

– Вероятность http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image033.gif того, что **в http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image035.gif независимых испытаниях** некоторое случайное событие http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image002_0000.gif наступит **ровно http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image037.gif раз**, равна:

http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image039.gif, где:

http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image004_0002.gif – вероятность появления события http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image002_0001.gif в каждом испытании;  
http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image009_0000.gif – вероятность не появления события http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image002_0002.gif в каждом испытании.

Коэффициент http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image043.gif часто называют ***биномиальным коэффициентом***.

***Примечание****: формула Бернулли справедлива только для тех независимых испытаний, в которых вероятность http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image004_0003.gif события http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image002_0003.gif сохраняется постоянной. Но на практике в результате испытаний могут появляться разные события с разными вероятностями – в этом случае работает другая формула.*

**Задача 2.** Найти вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет 3 раза.

Решение: сначала немного порассуждаем: всего проводится 10 повторных независимых испытаний. Сколькими способами можно выбрать 3 испытания, в которых выпадет орёл?

 способами.

Используем формулу Бернулли: http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image039_0000.gif, в данном случае:  
http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image048.gif – всего испытаний;

 – количество испытаний, в которых должен появиться орёл;



http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image052.gif – вероятность появления орла в каждом испытании;

http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image054.gif – вероятность появления решки в каждом испытании.

Таким образом:

http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image056.gif – вероятность того, что при 10 бросках монеты орёл выпадет ровно 3 раза.

**Ответ**: http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image058.gif

*При нахождении вероятности того, что при броске 10 монет орёл выпадет на 3 монетах в принципе ничего не меняется.*

Здесь испытания не повторяются, а скорее, производятся одновременно, но, тем не менее, работает та же самая формула: http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image060.gif.

Решение будет отличаться смыслом и некоторыми комментариями, в частности:  
http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image062.gif способами можно выбрать 3 монеты, на которых выпадет орёл.  
http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image052_0000.gif – вероятность выпадения орла на каждой из 10 монет  
и т.д.

Однако на практике подобные задачи встречаются не столь часто, и, видимо, по этой причине формула Бернулли чуть ли не стереотипно ассоциируется только с повторными испытаниями. Хотя, как только что было показано, повторяемость вовсе не обязательна.

**Задача 3.** Игральную кость бросают 6 раз. Найти вероятность того, что 5 очков:

а) не выпадут *(выпадут 0 раз)*;

б) выпадут 2 раза;

в) выпадут 5 раз.

Результаты округлить до 4 знаков после запятой.

**Решение**: используем формулу Бернулли: *http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image039_0001.gif*, в данной задаче: *http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image123_0000.gif* – всего испытаний (число 5 только на одной из 6 граней кубика); *http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image172.gif* – вероятность выпадения «пятёрки» в каждом испытании; *http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image174.gif* – вероятность того, что «пятёрка» не выпадет (для каждого испытания).а) *http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image176.gif  
http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image178.gif* – вероятность того, что в результате 6 бросков кубика «пятёрка» не появится.б) *http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image180.gif  
http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image182.gif* – вероятность того, что в 6 испытаниях «пятёрка» выпадет ровно 2 раза.в) *http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image184.gif  
http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image186.gif* – вероятность того, что в 6 испытаниях «пятёрка» выпадет ровно 5 раз.**Ответ**: http://mathprofi.ru/n/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli_clip_image188.gif

Очевидно, что в рассматриваемых примерах некоторые события более вероятны, а некоторые – менее вероятны. Так, например, при 6 бросках кубика даже безо всяких расчётов интуитивно понятно, что вероятности событий пунктов «а» и «бэ» значительно больше вероятности того, что «пятёрка» выпадет 5 раз.