**ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОГО РЯДА**

В общем виде **числовой ряд** можно записать так: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image002.gif. http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image004.gif– математический значок суммы;  
http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image006.gif – **общий член ряда** (запомните этот простой термин); http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image008.gif – переменная-«счётчик». Запись http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image010.gifобозначает, что проводится суммирование от 1 до «плюс бесконечности», то есть, сначала у нас http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image012.gif, затем http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image014.gif, потом http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image016.gif, и так далее – до бесконечности. Вместо переменной http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image008_0000.gif иногда используется переменная http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image018.gif или http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image020.gif. Суммирование не обязательно начинается с единицы, в ряде случаев оно может начинаться с нуля http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image022.gif, с двойки http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image024.gifлибо с любого *натурального числа*. В соответствии с переменной-«счётчиком» любой ряд можно расписать развёрнуто:  
http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image026.gif – и так далее, до бесконечности. Cлагаемые http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image028.gif – это**ЧИСЛА**, которые называются **членами** ряда. Если все они неотрицательны *(больше либо равны нулю)*, то такой ряд называют **положительным числовым рядом**.

Пример 1 Записать первые три члена ряда  
http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image030.gif Сначала http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image012_0000.gif, тогда: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image032.gif. Затем http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image014_0000.gif, тогда: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image034.gif . Потом http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image016_0000.gif, тогда: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image037.gif. Процесс можно продолжить до бесконечности, но по условию требовалось написать первые три члена ряда, поэтому записываем ответ: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image039.gif

Пример 2. Записать первые три члена ряда http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image043.gif На самом деле задание выполняется устно: **мысленно подставляем в общий член ряда** сначала http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image012_0001.gif, потом http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image014_0001.gif и http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image016_0001.gif. В итоге: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image047.gif

Пример 3. Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда  
http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image057.gif Здесь нет какого-то четкого алгоритма решения, закономерность нужно просто увидеть. В данном случае: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image059.gif

**ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ.**

Рассмотрим ряд http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image002.gif и распишем его подробнее: http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image004.gif У членов знакочередующегося ряда чередуются знаки: плюс, минус, плюс, минус, плюс, минус и т.д. до бесконечности. Знакочередование обеспечивает множитель http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image006.gif: если http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image008.gif чётное, то будет знак «плюс», если нечётное – знак «минус» . Таким образом, знакочередующийся ряд «опознается» по минус единичке в степени «эн».

В практических примерах знакочередование членов ряда может обеспечивать не только множитель http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image006_0000.gif, но и: http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image010.gif, http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image012.gif, http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image014.gif, …. Например:http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image016.gif

http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image018.gif, http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image020.gif, http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image022.gif и т.п. – такие множители **не обеспечивают смену знака**. Совершенно понятно, что при любом натуральном http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image008_0000.gif: http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image024.gif, http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image026.gif, http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image028.gif.

**Признак Лейбница**: Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по модулю, то ряд сходится то есть: 1) Ряд является знакочередующимся.

2) Члены ряда убывают по модулю: http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image030.gif. Причём, убывают монотонно.

**Если выполнены оба условия, то ряд сходится**.

Вернемся к ряду http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image032.gif. Мысленно сотрём ластиком все знаки и посмотрим на числа. Мы увидим, что каждый следующий член ряда меньше, чем предыдущий. Таким образом, следующие фразы обозначают одно и то же:

– Члены ряда без учёта знака убывают. – Члены ряда убывают по модулю.  
– Члены ряда убывают по абсолютной величине.

– Модуль общего члена ряда стремится к нулю: http://mathprofi.ru/g/priznak_leibnica_primery_reshenii_clip_image030_0000.gif

## СХОДИМОСТЬ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Одной из ключевых задач темы является **исследование ряда на сходимость**. При этом возможны два случая: 1) **Ряд**http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image065.gif**расходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image067.gif либо суммы вообще не существует, как, например, у ряда  
http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image888.gif (вот, кстати, и пример ряда с отрицательными членами). Хороший образец расходящегося числового ряда: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image069.gif. Здесь совершенно очевидно, что каждый следующий член ряда больше, чем предыдущий, поэтому http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image071.gif и, значит, ряд расходится. Ещё более тривиальный пример: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image889.gif.

2) **Ряд**http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image065_0000.gif**сходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому конечному числу http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image073.gif: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image075.gif. Пожалуйста: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image891.gif  – этот ряд сходится и его сумма равна нулю. В качестве более содержательного примера можно привести бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, известную нам ещё со школы: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image077.gif. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии рассчитывается по формуле: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image079.gif, где http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image081.gif – первый член прогрессии, а http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image083.gif – её основание, которое, как правило, записывают в виде правильной дроби. В данном случае: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image085.gif, http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image087.gif. Таким образом: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image089.gif Получено конечное число, значит, ряд http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image091.gif сходится, что и требовалось доказать.

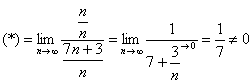
**Существует несколько признаков сходимости ряда:** необходимый признак сходимости ряда, признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши, признак Лейбница и некоторые другие признаки. **Когда какой признак применять?** Это зависит от общего члена ряда http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image006_0000.gif.

## ****НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА****

**Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image800.gif.**

**Если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится:**  http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image096.gif, то ряд расходится.

Докажем, что ряд из первого примера http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image030_0000.gif расходится. Общий член ряда: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image100.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image102.gif **Вывод**: ряд http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image030_0001.gif **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Пример 4. Исследовать ряд на сходимость http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image104.gif. Решаем: http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image107.gif Делим числитель и знаменатель на http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image008_0002.gif  
. Исследуемый ряд **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

**ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД**

http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image118.gif - данный ряд называется **гармоническим рядом**. Легко заметить, что http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image120.gif, НО. В теории математического анализа доказано, что **гармонический ряд расходится**.

**Также следует запомнить понятие обобщенного гармонического ряда:**  
http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image122.gif 1) Данный ряд **расходится** при http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image124.gif. Например, расходятся ряды http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image126.gif, http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image128.gif, http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image118_0000.gif.  
2) Данный ряд **сходится** при http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image130.gif. Например, сходятся ряды http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image132.gif, http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image134.gif, http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image136.gif. Еще раз подчеркиваю, что почти во всех практических заданиях нам совершенно не важно, чему равна [**сумма**](http://www.mathprofi.ru/kak_naiti_summu_ryada.html), например, ряда http://www.mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image134_0000.gif, **важен сам факт его сходимости**.

## ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ДАЛАМБЕРА

**Когда нужно применять признак сходимости Даламбера?**

1) В общий член ряда входит какое-нибудь число в степени, например, http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image002.gif, http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image004.gif, http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image006.gif и так далее. Причем, совершенно не важно, где эта штуковина располагается, в числителе или в знаменателе – важно, что она там присутствует.

2) В общий член ряда входит факториал. http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image008.gif http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image010.gif http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image012.gif http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image014.gif http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image018.gif

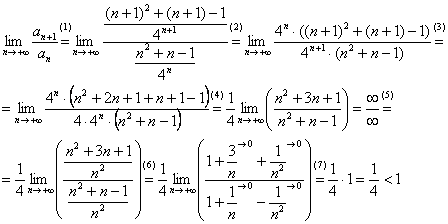
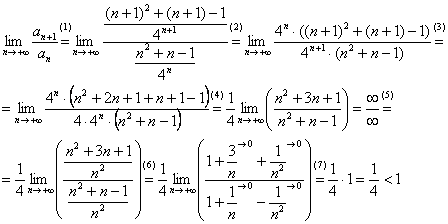
При использовании признака Даламбера необходимо расписывать факториал подробно. Как и в предыдущем пункте, факториал может располагаться вверху или внизу дроби.

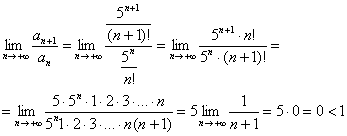
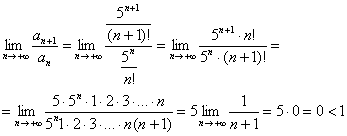
3) Если в общем члене ряда есть «цепочка множителей», например, http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image022.gif.

Вместе со степенями или (и) факториалами в начинке ряда часто встречаются многочлены, это не меняет дела – нужно использовать признак Даламбера. Кроме того, в общем члене ряда может встретиться одновременно и степень и факториал; может встретиться два факториала, две степени, важно чтобы там находилось **хоть что-то** из рассмотренных пунктов – и это как раз предпосылка для использования признака Даламбера.

**Признак Даламбера**: Рассмотрим **положительный числовой ряд** http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image024.gif. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему: http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image026.gif, то:  
а) При http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image028.gif ряд **сходится**. В частности, ряд сходится при http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image030.gif.  
б) При http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image032.gif ряд **расходится**. В частности, ряд расходится при http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image034.gif.  
в) При http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image036.gif **признак не дает ответа**. Нужно использовать другой признак. Чаще всего единица получается в том случае, когда признак Даламбера пытаются применить там, где нужно использовать [**предельный признак сравнения**](http://www.mathprofi.ru/ryady_dlya_chajnikov.html#pps).

Пример 5. Исследовать ряд на сходимость http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image040.gif  
Мы видим, что в общем члене ряда у нас есть http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image042.gif, а это верная предпосылка того, что нужно использовать признак Даламбера.

    
Таким образом, исследуемый ряд **сходится.**

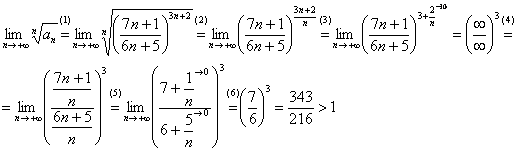
Пример 6. Исследовать ряд на сходимость http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image101.gif. Используем признак Даламбера:  
** **  
Таким образом, исследуемый ряд ***сходится***.

**ПРИЗНАК КОШИ**

**Радикальный признак Коши:**Рассмотрим **положительный числовой ряд** http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image024_0000.gif. Если существует предел: http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image115.gif, то:  
а) При http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image028_0000.gif ряд **сходится**. В частности, ряд сходится при http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image030_0000.gif.  
б) При http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image032_0000.gif ряд **расходится**. В частности, ряд расходится при http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image034_0000.gif.  
в) При http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image036_0000.gif **признак не дает ответа**. Нужно использовать другой признак. Интересно отметить, что если признак Коши не даёт нам ответа на вопрос о сходимости ряда, то признак Даламбера тоже не даст ответа. Но если признак Даламбера не даёт ответа, то признак Коши вполне может «сработать». То есть, признак Коши является в этом смысле более сильным признаком.

**Когда нужно использовать радикальный признак Коши?** Радикальный признак Коши обычно использует в тех случаях, когда общий член ряда **ПОЛНОСТЬЮ** находится в степени, зависящей от «эн». Либо когда корень http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image117.gif «хорошо» извлекается из общего члена ряда.

Пример 7 Исследовать ряд на сходимость http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image119.gif

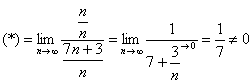
Мы видим, что общий член ряда полностью находится под степенью, зависящей от http://www.mathprofi.ru/g/priznak_dalambera_priznaki_koshi_clip_image050_0001.gif, а значит, нужно использовать радикальный признак Коши:  
  
Таким образом, исследуемый ряд **расходится**.

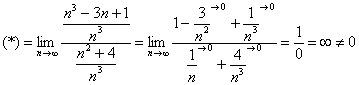
**Примеры:**

1) **Ряд** http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image065.gif**расходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности: http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image067.gif либо суммы вообще не существует, как, например, у ряда  
http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image888.gif. Хороший образец расходящегося числового ряда встретился в начале урока: http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image069.gif. Здесь совершенно очевидно, что каждый следующий член ряда – больше, чем предыдущий, поэтому http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image071.gif и, значит, ряд расходится.

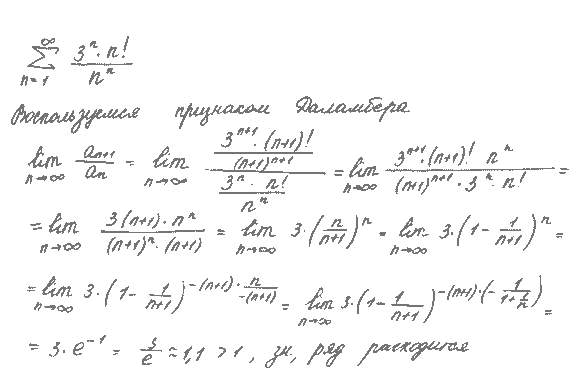
2) **Ряд** http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image065_0000.gif**сходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому конечному числу http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image073.gif: http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image075.gif. Пожалуйста: http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image891.gif  – этот ряд сходится и его сумма

равна нулю. Р яд http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image091.gif сходится, так как  http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image089.gif

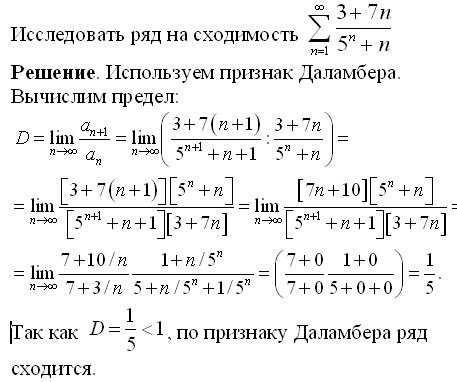
3) Исследовать ряд на сходимость http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image104.gif Решаем: http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image107.gif Делим числитель и знаменатель на http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image008_0002.gif Исследуемый ряд расходится.  
4) Исследовать ряд на сходимость http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image112.gif

*http://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image230.gif* Делим числитель и знаменатель наhttp://mathprofi.ru/g/ryady_dlya_chajnikov_clip_image232.gif  
**

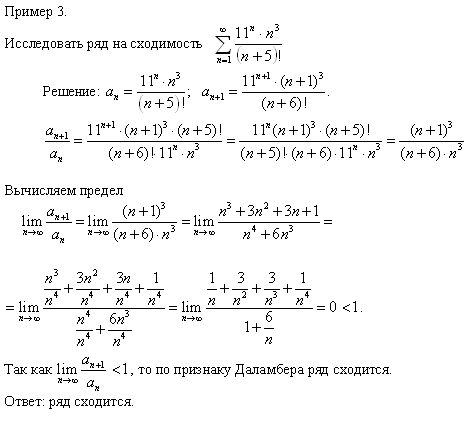
5) Исследуйте ряд на сходимость:



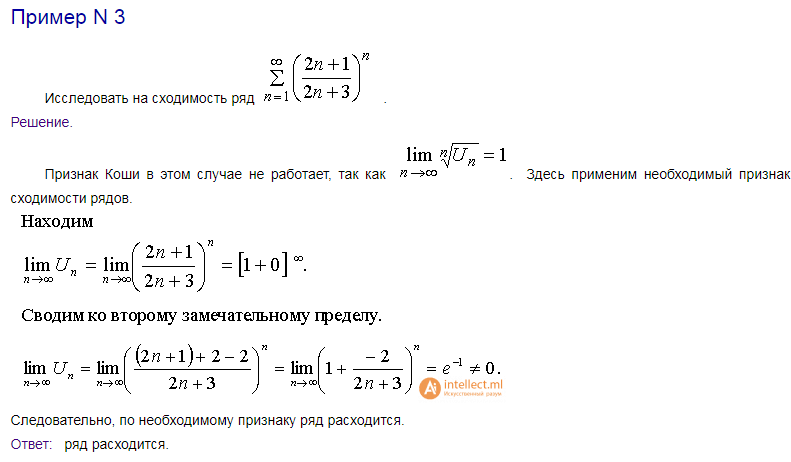
6)



7)



8)



9)

