**ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОГО РЯДА**

В общем виде **числовой ряд** можно записать так: . – математический значок суммы;
 – **общий член ряда** (запомните этот простой термин);  – переменная-«счётчик». Запись обозначает, что проводится суммирование от 1 до «плюс бесконечности», то есть, сначала у нас , затем , потом , и так далее – до бесконечности. Вместо переменной  иногда используется переменная  или . Суммирование не обязательно начинается с единицы, в ряде случаев оно может начинаться с нуля , с двойки либо с любого *натурального числа*. В соответствии с переменной-«счётчиком» любой ряд можно расписать развёрнуто:
 – и так далее, до бесконечности. Cлагаемые  – это**ЧИСЛА**, которые называются **членами** ряда. Если все они неотрицательны *(больше либо равны нулю)*, то такой ряд называют **положительным числовым рядом**.

Пример 1 Записать первые три члена ряда
 Сначала , тогда: . Затем , тогда:  . Потом , тогда: . Процесс можно продолжить до бесконечности, но по условию требовалось написать первые три члена ряда, поэтому записываем ответ: 

Пример 2. Записать первые три члена ряда  На самом деле задание выполняется устно: **мысленно подставляем в общий член ряда** сначала , потом  и . В итоге: 

Пример 3. Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда
 Здесь нет какого-то четкого алгоритма решения, закономерность нужно просто увидеть. В данном случае: 

**ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ.**

Рассмотрим ряд  и распишем его подробнее:  У членов знакочередующегося ряда чередуются знаки: плюс, минус, плюс, минус, плюс, минус и т.д. до бесконечности. Знакочередование обеспечивает множитель : если  чётное, то будет знак «плюс», если нечётное – знак «минус» . Таким образом, знакочередующийся ряд «опознается» по минус единичке в степени «эн».

В практических примерах знакочередование членов ряда может обеспечивать не только множитель , но и: , , , …. Например:

 , ,  и т.п. – такие множители **не обеспечивают смену знака**. Совершенно понятно, что при любом натуральном : , , .

**Признак Лейбница**: Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по модулю, то ряд сходится то есть: 1) Ряд является знакочередующимся.

2) Члены ряда убывают по модулю: . Причём, убывают монотонно.

**Если выполнены оба условия, то ряд сходится**.

Вернемся к ряду . Мысленно сотрём ластиком все знаки и посмотрим на числа. Мы увидим, что каждый следующий член ряда меньше, чем предыдущий. Таким образом, следующие фразы обозначают одно и то же:

– Члены ряда без учёта знака убывают. – Члены ряда убывают по модулю.
– Члены ряда убывают по абсолютной величине.

– Модуль общего члена ряда стремится к нулю: 

## СХОДИМОСТЬ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Одной из ключевых задач темы является **исследование ряда на сходимость**. При этом возможны два случая: 1) **Ряд****расходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности:  либо суммы вообще не существует, как, например, у ряда
 (вот, кстати, и пример ряда с отрицательными членами). Хороший образец расходящегося числового ряда: . Здесь совершенно очевидно, что каждый следующий член ряда больше, чем предыдущий, поэтому  и, значит, ряд расходится. Ещё более тривиальный пример: .

2) **Ряд****сходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому конечному числу : . Пожалуйста:   – этот ряд сходится и его сумма равна нулю. В качестве более содержательного примера можно привести бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, известную нам ещё со школы: . Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии рассчитывается по формуле: , где  – первый член прогрессии, а  – её основание, которое, как правило, записывают в виде правильной дроби. В данном случае: , . Таким образом:  Получено конечное число, значит, ряд  сходится, что и требовалось доказать.

**Существует несколько признаков сходимости ряда:** необходимый признак сходимости ряда, признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши, признак Лейбница и некоторые другие признаки. **Когда какой признак применять?** Это зависит от общего члена ряда .

## ****НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА****

**Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю: .**

**Если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится:**  , то ряд расходится.

 Докажем, что ряд из первого примера  расходится. Общий член ряда: 
 **Вывод**: ряд  **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Пример 4. Исследовать ряд на сходимость . Решаем:  Делим числитель и знаменатель на 
. Исследуемый ряд **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

**ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД**

 - данный ряд называется **гармоническим рядом**. Легко заметить, что , НО. В теории математического анализа доказано, что **гармонический ряд расходится**.

**Также следует запомнить понятие обобщенного гармонического ряда:**
 1) Данный ряд **расходится** при . Например, расходятся ряды , , .
2) Данный ряд **сходится** при . Например, сходятся ряды , , . Еще раз подчеркиваю, что почти во всех практических заданиях нам совершенно не важно, чему равна [**сумма**](http://www.mathprofi.ru/kak_naiti_summu_ryada.html), например, ряда , **важен сам факт его сходимости**.

## ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ДАЛАМБЕРА

**Когда нужно применять признак сходимости Даламбера?**

1) В общий член ряда входит какое-нибудь число в степени, например, , ,  и так далее. Причем, совершенно не важно, где эта штуковина располагается, в числителе или в знаменателе – важно, что она там присутствует.

2) В общий член ряда входит факториал.     

При использовании признака Даламбера необходимо расписывать факториал подробно. Как и в предыдущем пункте, факториал может располагаться вверху или внизу дроби.

3) Если в общем члене ряда есть «цепочка множителей», например, .

Вместе со степенями или (и) факториалами в начинке ряда часто встречаются многочлены, это не меняет дела – нужно использовать признак Даламбера. Кроме того, в общем члене ряда может встретиться одновременно и степень и факториал; может встретиться два факториала, две степени, важно чтобы там находилось **хоть что-то** из рассмотренных пунктов – и это как раз предпосылка для использования признака Даламбера.

**Признак Даламбера**: Рассмотрим **положительный числовой ряд** . Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему: , то:
а) При  ряд **сходится**. В частности, ряд сходится при .
б) При  ряд **расходится**. В частности, ряд расходится при .
в) При  **признак не дает ответа**. Нужно использовать другой признак. Чаще всего единица получается в том случае, когда признак Даламбера пытаются применить там, где нужно использовать [**предельный признак сравнения**](http://www.mathprofi.ru/ryady_dlya_chajnikov.html#pps).

Пример 5. Исследовать ряд на сходимость 
Мы видим, что в общем члене ряда у нас есть , а это верная предпосылка того, что нужно использовать признак Даламбера.

  
Таким образом, исследуемый ряд **сходится.**

Пример 6. Исследовать ряд на сходимость . Используем признак Даламбера:
** **
Таким образом, исследуемый ряд ***сходится***.

**ПРИЗНАК КОШИ**

**Радикальный признак Коши:**Рассмотрим **положительный числовой ряд** . Если существует предел: , то:
а) При  ряд **сходится**. В частности, ряд сходится при .
б) При  ряд **расходится**. В частности, ряд расходится при .
в) При  **признак не дает ответа**. Нужно использовать другой признак. Интересно отметить, что если признак Коши не даёт нам ответа на вопрос о сходимости ряда, то признак Даламбера тоже не даст ответа. Но если признак Даламбера не даёт ответа, то признак Коши вполне может «сработать». То есть, признак Коши является в этом смысле более сильным признаком.

**Когда нужно использовать радикальный признак Коши?** Радикальный признак Коши обычно использует в тех случаях, когда общий член ряда **ПОЛНОСТЬЮ** находится в степени, зависящей от «эн». Либо когда корень  «хорошо» извлекается из общего члена ряда.

Пример 7 Исследовать ряд на сходимость 

Мы видим, что общий член ряда полностью находится под степенью, зависящей от , а значит, нужно использовать радикальный признак Коши:

Таким образом, исследуемый ряд **расходится**.

**Примеры:**

1) **Ряд** **расходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности:  либо суммы вообще не существует, как, например, у ряда
. Хороший образец расходящегося числового ряда встретился в начале урока: . Здесь совершенно очевидно, что каждый следующий член ряда – больше, чем предыдущий, поэтому  и, значит, ряд расходится.

2) **Ряд** **сходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому конечному числу : . Пожалуйста:   – этот ряд сходится и его сумма

равна нулю. Р яд  сходится, так как  

3) Исследовать ряд на сходимость  Решаем:  Делим числитель и знаменатель на  Исследуемый ряд расходится.
4) Исследовать ряд на сходимость 

 ** Делим числитель и знаменатель на
**

5) Исследуйте ряд на сходимость:

 

6)



7)



8)



9)

