**СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТЬ**

**Испытанием** называют наблюдение явления, опыт, эксперимент, которые можно провести многократно.

**Событие** - это результат, исход испытания.

**Пример 1.** Сдача экзамена - это испытание; получение определенной отметки - событие. Выстрел - это испытание; попадание в определенную область мишени - событие. Бросание игрального кубика - это испытание; появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости - событие.

**Случайным событием** называется событие, которое при осуществлении некоторых условий может произойти или не произойти. Например, попадание в некоторый объект или промах при стрельбе по этому объекту из данного орудия является случайным событием.

Событие называется **достоверным**, если в результате испытания оно обязательно происходит. **Невозможным** называется событие, которое в результате испытания произойти не может.

**Виды случайных событий**

События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появления других событий в одном и том же испытании.

**Пример 2:**

* **несовместные события**: день и ночь, человек читает и человек спит, число иррациональное и четное;
* **совместные события**: идет дождь и идет снег, человек ест и человек читает, число целое и четное.

Случайные события образуют **полную группу**, если при каждом испытании может появиться любое из них и не может появиться какое-либо иное событие, несовместное с ними.

**Пример 3.** При сдаче зачета возможны следующие исходы: «зачтено», «не зачтено», «не явился»; при подбрасывании монеты – «орел», «решка».

Исход называется **благоприятствующим** появлению события АА, если появление этого события влечет за собой появление события А.

**Пример 4.** В урне находится 8 пронумерованных шаров (на каждом шаре поставлено по одной цифре от 1 до 8). Шары с цифрами 1, 2, 3 красные, остальные – черные. Появление шара с цифрой 1 (или цифрой 2 или цифрой 3) есть событие, благоприятствующее появлению красного шара. Появление шара с цифрой 4 (или цифрой 5, 6, 7, 8) есть событие, благоприятствующее появлению черного шара.

**Вероятностью события** A называют отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу

P(A) = $\frac{m}{n}$ .

**Свойство 1.**  Вероятность достоверного события равна единице
**Свойство 2.**  Вероятность невозможного события равна нулю.
**Свойство 3.**  Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству 0≤P(A)≤1 .

**Примеры решений задач на классическую вероятность**

**Пример 5.**  В урне 10 пронумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превосходит 10?

Решение. Пусть событие А = $($Номер вынутого шара не превосходит 10). Число случаев благоприятствующих появлению события А равно числу всех возможных случаев m=n=10. Следовательно, Р(А)=1. Событие А достоверное.

Ответ: 1.

**Пример 6.** В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?

Решение. Всего необходимо вынуть два шара из десяти, это сочетание элементов и оно равно: $n=C\_{10}^{2}=\frac{10!}{2! ∙\left(10-2\right)!}=\frac{10!}{2! ∙8!}=\frac{8! ∙9 ∙10}{2! ∙8!}=\frac{9 ∙10}{1 ∙2}=45$.
Число случаев, когда среди этих двух шаров будут два белых это сочетание 2 из 6 и , равно $m=C\_{6}^{2}=\frac{6!}{2! ∙\left(6-2\right)!}=\frac{6!}{2! ∙4!}=\frac{4! ∙5 ∙6}{2! ∙4!}=\frac{5 ∙6}{1 ∙2}=15$ .

Искомая вероятность  равна $Р=\frac{m}{n}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$ .

Ответ: $\frac{1}{3}$ .

**Пример 7.** В урне 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вынуть из урны синий шар?

Решение. Так как синих шаров в урне нет, то m=0, n=15. Следовательно, искомая вероятность р=0. Событие, заключающееся в вынимании синего шара, невозможное.

Ответ: 0.

**Пример 8.** Из колоды в 36 карт вынимается одна карта. Какова вероятность появления карты червовой масти?

**Решение**. Количество элементарных исходов (количество карт) n=36. Событие А =(Появление карты червовой масти). Число случаев, благоприятствующих появлению события А, m=9 (всего карт одной масти в колоде). Следовательно, .

Ответ: 0,25.

**Пример 9.** В кабинете работают 6 мужчин и 4 женщины. Для переезда наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц три женщины.

Решение. Общее число возможных исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 7 человек из 10, т.е.

 $n=С\_{10}^{7}=\frac{10!}{7! ∙\left(10-7\right)!}=\frac{10!}{7! ∙3!}=\frac{7! ∙8 ∙9 ∙10}{7! ∙3!}=\frac{8 ∙9 ∙10}{1 ∙2 ∙3}=120$ .

Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию: трех женщин можно выбрать из четырех и получаем

 $m\_{1}=С\_{4}^{3}=\frac{4!}{3! ∙\left(4-1\right)!}=\frac{4!}{3! ∙1!}=\frac{3! ∙4}{3! }=4$  способами; при этом остальные четыре человека должны быть мужчинами, их можно отобрать $m\_{2}=С\_{6}^{4}=\frac{6!}{4! ∙\left(6-4\right)!}=\frac{6!}{4! ∙2!}=\frac{4! ∙5 ∙6}{4! ∙2! }=\frac{5 ∙6}{1 ∙2}=15$ способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $m=m\_{1} ∙ m\_{2}=4 ∙15=60$.

Искомая вероятность $P=\frac{m}{n}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$ .

Ответ: $\frac{1}{2}$ .

Случайные события А и B называются **совместными**, если при данном испытании могут произойти оба эти события.

**Суммой A + B событий A** и **B** называется событие, состоящее в появлении события **А**, или события **В**, или **обоих** этих событий.

**Пример 10.** Пусть **А** - идет дождь, **B** - идет снег, тогда **(А + В)** - либо дождь, либо снег, либо дождь со снегом, т. е. осадки; **А** - пошли на дискотеку; **B** - пошли в библиотеку, тогда **(А + В)** - пошли либо на дискотеку, либо в библиотеку, т. е. вышли из дома.

**Теорема сложения вероятностей несовместных событий**

**Теорема**. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

|  |  |
| --- | --- |
| **P (A + B) = P(A) + P(B).** |  |

**Теорема о сложении вероятностей 2.** Вероятность суммы **совместных** событий вычисляется по формуле

.

**Пример 11.** В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие А)

**P (A) =** $\frac{10}{30}$**=** $\frac{1}{3}$**.**

Вероятность появления синего шара (событие В)

**P (В) =** $\frac{5}{30}$**=** $\frac{1}{6}$**.**

События **А** и **В** несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

По формуле 2.1 искомая вероятность

**P (A + B) = P(A) + P(B) =** $\frac{1}{3}$ **+** $\frac{1}{6}$**6 =** $\frac{1}{2}$.

 Ответ: $\frac{1}{2}$.

**Противоположными** называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через **А**, то другое принято обозначать .

**Пример 12.** Если при бросании кости событие **А** состоит в выпадении **6**, то противоположное событие – это не выпадение **6**, т.е. выпадение **1, 2, 3, 4** или **5**.

**Пример 13**: если **А** - число четное, то  - число нечетное; если **А** - зима, то  - не зима (либо осень, либо лето, либо весна); если **А** - сдал экзамен, то  - не сдал экзамен.

**Пространство исходов** иногда удобно изображать в виде прямоугольника, каждая точка которого соответствует элементарному событию. Это позволяет рассматривать произвольное событие **А** как подмножество пространства исходов.


**Теорема**. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
| **P(А) + P(http://umk.portal.kemsu.ru/uch-mathematics/papers/posobie/vim06.gif) = 1.** |

**Произведением** событий А и В называется событие АВ, которое наступает тогда и только тогда, когда наступают оба события: А и В одновременно.

**Теорема об умножении вероятностей.** Вероятность произведения независимых событий А и В вычисляется по формуле:

.

**Пример 14.** В первом ящике 1 белый и 5 черных шаров, во втором 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой – черный.

Решение. Обозначим события и найдем их вероятности:

А – вынули белый шар из первого ящика:  ;

 - вынули черный шар из первого ящика: ;

В – белый шар из второго ящика: ;

 - черный шар из второго ящика: .

Нам нужно, чтобы произошло одно из событий  или . По теореме об умножении вероятностей $Р\left(А\overbar{В}\right)=\frac{1}{6}∙\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$ и $Р\left(\overbar{А}В\right)=\frac{5}{6}∙\frac{2}{3}=\frac{10}{18}$ .

Тогда искомая вероятность по теореме сложения будет $Р\left(А\overbar{В}\right)+ Р\left(\overbar{А}В\right)=\frac{1}{18}+\frac{10}{18}=\frac{11}{18} $ .

Ответ: $\frac{11}{18} $ .

**Пример15.** Вероятность попадания в цель у первого стрелка 0,8, у второго – 0,9. Стрелки делают по выстрелу. Найти вероятность: а) двойного попадания; б) двойного промаха, в) хотя бы одного попадания; г) одного попадания.

Решение.

Пусть А – попадание первого стрелка, ;

В – попадание второго стрелка, .

Тогда  - промах первого, ;

 - промах второго, .

Найдем нужные вероятности.

а) АВ – двойное попадание, 

б)  – двойной промах, .

в) А+В – хотя бы одно попадание,

.

г)  – одно попадание,

.

**Пример 16.** Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках равны 0,6; 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится 1) только в одном справочнике; 2) только в двух справочниках; 3) во всех трех справочниках.

Решение.

А – формула содержится в первом справочнике, $ Р\left(А\right)=0,6$;

$\overbar{А}$ – формула не содержится в первом справочнике, $Р\left(\overbar{А}\right)=1-0,6=0,2$ ;

В – формула содержится во втором справочнике, $Р\left(В\right)=0,7$ ;

$\overbar{В}$ – формула не содержится в первом справочнике, $Р\left(\overbar{В}\right)=1-0,7=0,3$ ;

С – формула содержится в третьем справочнике, $Р\left(С\right)=0,8$ ;

$\overbar{С}$ – формула не содержится в первом справочнике, $Р\left(\overbar{С}\right)=1-0,8=0,3$ .

Воспользуемся теоремами сложения и умножения вероятностей.

1. Вероятность того, что формула содержится только в одном справочнике равна:  

2. Вероятность того, что формула содержится только в двух справочниках равна:  .

3. Вероятность того, что формула содержится во всех трех справочниках равна:   .

 Ответ: 0,188; 0,452; 0,336.

Пусть в результате испытания могут появиться n событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

**Теорема.** Вероятность **появления хотя бы одного из событий** , независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий



Если события  имеют одинаковую вероятность , то формула принимает простой вид:

.

**Пример 17.** Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы:

$Р\_{1}$ = 0,8; $ Р\_{2}$ = 0,7;  $Р\_{3}$ = 0,9. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события  (попадание первого орудия),  (попадание второго орудия) и  (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям ,  и  (т. е. вероятности промахов), соответственно равны:

, , 

Искомая вероятность .

 Ответ: 0,994.

**Пример 18.** В типографии имеется 4 плоскопечатных машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие А).

Решение. События "машина работает" и "машина не работает" (в данный момент) — противоположные, поэтому сумма их вероятностей равна единице: 

Отсюда вероятность того, что машина в данный момент не работает, равна 

Искомая вероятность .

Ответ: 0,9999.

Случайное событие определено как событие, которое при осуществлении совокупности условий эксперимента может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий эксперимента, не налагается, то такую вероятность называют **безусловной**; если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют **условной**. Например, часто вычисляют вероятность события BB при дополнительном условии, что произошло событие АА.

**Условной вероятностью** PA(B)=P(B|A) (два обозначения) называют вероятность события В, вычисленную в предположении, что событие А уже наступило.

Вероятность **совместного появления двух зависимых событий** равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие произошло, т.е.

P(AB)=P(B)⋅P(A|B)=P(A)⋅P(B|A).

В частности, отсюда получаем формулы для условной вероятности:

P(A|B)=P(AB)P(B), P(B|A)=P(AB)P(A).

**Примеры решений задач на условную вероятность**

**Пример 19.** В урне находятся 3 белых шара и 2 черных. Из урны вынимается один шар, а затем второй. Событие В – появление белого шара при первом вынимании. Событие А – появление белого шара при втором вынимании. Найдите вероятность каждого события.

Решение. Очевидно, что вероятность события А, если событие В произошло, будет, т.е. в первый раз вытащили белый шар и во второй раз также вытащили белый шар, получаем:

, так как всего 5 - 1=4.

Вероятность события А при условии, что событие В не произошло, т.е. в первый раз вытащили белый шар и во второй раз также вытащили черный шар, получаем:

, так как всего 5 - 1=4.

**Пример 20.** В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие В), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие А).

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность .

Этот же результат можно получить по формуле
.

Действительно, вероятность появления белого шара при первом испытании
.

Найдем вероятность  того, что в первом испытании появится черный шар, а во втором — белый. Общее число исходов — совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений . Из этого числа исходов событию  благоприятствуют  исходов. Следовательно, .

Искомая условная вероятность
 Результаты совпали.

**Пример 21.** В трамвайном парке имеются 15 трамваев маршрута №1 и 10 трамваев маршрута №2. Какова вероятность того, что вторым по счету на линию выйдет трамвай маршрута №1?

Решение. Пусть А - событие, состоящее в том, что на линию вышел трамвай маршрута №1, В - маршрута №2.

Рассмотрим все события, которые могут при этом быть (в условиях нашей задачи): . Из них нас будут интересовать только первое и третье, когда вторым выйдет трамвай маршрута №1.

Так как все эти события совместны, то:

; ;

отсюда искомая вероятность
.

**Пример 22.** Какова вероятность того, что 2 карты, вынутые из колоды в 36 карт, окажутся одной масти?

Решение. Сначала подсчитаем вероятность того, что две карты окажутся одной определенной масти (например «пики»). Пусть А - появление первой карты такой масти, В - появление второй карты той же масти. Событие В зависит от события А, т.к. его вероятность меняется от того, произошло или нет событие А. Поэтому придется воспользоваться теоремой умножения в ее общей форме:

,
где  (после вынимания первой карты осталось 35 карт, из них той же масти, что и первая - 8).

Получаем
.

События, состоящие в том, что будут вынуты две карты масти «пики», масти «треф» и т.д., несовместны друг с другом. Следовательно, для нахождения вероятности их объединения воспользуемся теоремой сложения:
.