**ВЕРОЯТНОСТЬ И ГЕОМЕТРИЯ**

Итак, мы познакомились с [**классическим определением вероятности**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html) появления некоторого события http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image002.gif в испытании и простейшей формулой http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image004.gif, где  http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image006.gif – общее число *всех возможных* ***равновозможных***, ***элементарных*** исходов данного испытания,

а http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image008.gif – кол-во элементарных исходов, благоприятствующих событию http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image002_0000.gif.

Классическое определение вероятности оказывается эффективным для решения целого спектра задач, но с другой стороны, обладает и рядом недостатков. Даже правильнее сказать, не недостатков, а ограничений. Одним из таких ограничений является тот факт, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным количеством исходов. Простейший пример:

На отрезок http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image011.gif наудачу берется точка. Какова вероятность того, что она попадёт в промежуток http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image013.gif?

Простейший пример на геометрическое определение вероятности  
Поскольку на отрезке бесконечно много точек, то здесь нельзя применить формулу http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image004_0000.gif *(ввиду бесконечно большого значения «эн»)* и поэтому на помощь приходит другой подход, называемый **геометрическим определением вероятности**.

Всё очень похоже: вероятность наступления некоторого события А в испытании равна отношению http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image019.gif, где G – *геометрическая мера*, выражающая общее число всех возможных и равновозможных исходов данного испытания, а g – *мера*, выражающая количество благоприятствующих событию A исходов. На практике в качестве такой геометрической меры чаще всего выступает длина или площадь, реже – объём.

Рассмотрим событие: A  – брошенная на отрезок http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image011_0000.gif точка, попала в промежуток http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image013_0000.gif. Очевидно, что общее число исходов выражается длиной бoльшего отрезка: http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image026.gif, а благоприятствующие событию A исходы – длиной вложенного отрезка: http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image028.gif

По геометрическому определению вероятности:  
http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image030.gif

Слишком просто? Как и в случае с [**классическим определением**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html), это обманчивое впечатление. Обстоятельно и добросовестно разбираемся в практических примерах:

**Задача 1.** Метровую ленту случайным образом разрезают ножницами. Найти вероятность того, что длина обрезка составит не менее 80 см.

Решение: «чего тут сложного? Вероятность равна 1/5-й». Это автоматическая ошибка, которую допускают по небрежности. Да, совершенно верно – длина обрезка составит не менее 80 см, если от ленты отрезать не более 20 сантиметров. Но здесь часто забывают, что искомый разрез можно сделать **как с одного** конца ленты, **так и с другого**:  
  
Рассмотрим событие: http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image002_0005.gif – длина обрезка составит не менее 0,8 м.

Поскольку ленту можно разрезать где угодно, то общему числу исходов соответствует её длина: http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image037.gif Благоприятствующие событию http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image002_0006.gif  участки разреза отмечены на рисунке красным цветом и их суммарная длина равна: http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image039.gif По геометрическому определению: http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image041.gif

Ответ: 0,4

При оформлении задач следует обязательно указывать размерность *(единицы, метры, квадратные единицы, квадратные метры и т.д.)*. Кстати, обратите внимание, что на финальном этапе вычислений геометрическая мера сокращается. Так в рассмотренном примере, сократились метры: http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image043.jpg, в результате чего получилась привычная безразмерная вероятность.

**Задача 2.** После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошёл обрыв провода. Какова вероятность того, что он произошёл между 50-м и 55-м километрами линии?

**Решение:** используем геометрическое определение вероятности. Общему числу исходов соответствует участок длиной *http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image150.gif*,  благоприятствующему количеству исходов – участок длиной *http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image152.gif*. Таким образом: *http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image154.gif* – вероятность того, что обрыв провода произошёл между 50-м и 55-м километрами линии.

Ответ: *http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image156.gif*

Значительно чаще встречаются примеры, в которых фигурируют площади:

**Задача 3.** В треугольник со сторонами http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image045.gif вписан круг. Точка М произвольно ставится в треугольник. Найти вероятность того, что точка попадёт в круг.

Напоминаю, что вписанный круг лежит внутри треугольника и касается его сторон в 3 точках.

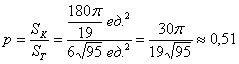
Решение: поскольку точка ставится в треугольник, а круг лежит внутри, то общему числу исходов соответствует площадь треугольника, а множеству благоприятствующих исходов – площадь вписанного круга. Что тут сказать? Ищем площади:

Если даны длины сторон треугольника, то его площадь удобно найти по *формуле Герона*:  
http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image049.gif, где http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image051.gif – длины сторон треугольника, а http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image053.gif – полупериметр.

Сначала вычислим полупериметр треугольника: http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image055.gif, а затем его площадь: http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image057.gifПлощадь вписанного круга найдём по формуле  , где   – его радиус.

Нужные формулы можно найти в учебнике или другом источнике информации. Итак, площадь вписанного круга: http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image064.gif

По геометрическому определению:

 – вероятность того, что точка http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image047_0000.gif попадёт во вписанный круг.

Ответ: http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image068.gif

**Задача 4.** В круге радиуса 10 см находится прямоугольный треугольник с катетами 12 и 7 см. В круг наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что она не попадёт в данный треугольник.

Следует отметить, что в этой задаче треугольник вовсе не обязан как-то касаться окружности, он просто расположен внутри круга и всё. Будьте внимательны!

**Решение:** общему количеству исходов соответствует площадь круга: *http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image158.gif* Площадь прямоугольного треугольника равна полу произведению его катетов: *http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image160.gif*По условию поставленная в круг точка ***не*** должна попасть в треугольник, поэтому благоприятствующее число исходов выражается разностью *http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image162.gif*По геометрическому определению:

*http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image164.gif* – вероятность того, что поставленная в круг точка не попадёт в треугольник.

Ответ: *http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image166.gif*

А теперь рассмотрим широко известную задачу о встрече:

**Задача 5.** Две грузовые машины могут подойти на погрузку в промежуток времени от 19.00 до 20.30. Погрузка первой машины длится 10 минут, второй – 15 минут. Какова вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой?

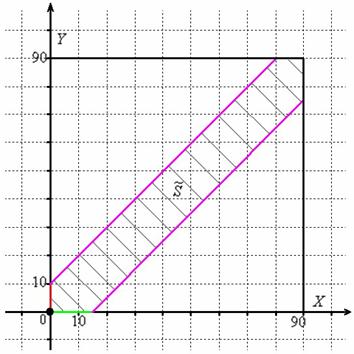
Давайте немного осмыслим условие. Во-первых, автомобили могут подойти на погрузку в любом порядке, а во-вторых – в любые моменты времени в течение полутора часов.

Решение:сначала выясняем длительность временного промежутка, на котором может состояться встреча. В данном случае, как уже отмечено выше, это полтора часа или 90 минут, т.е. 20ч30мин – 19ч.00мин = 90 минут. При этом здесь не имеют особого значения фактические временные рамки – погрузка автомобилей, может состояться, например, утром с 8.30 до 10.00, и решение будет точно таким же.

Вычисления допустимо проводить как в долях часа, так и в минутах. На мой взгляд, в большинстве случаев удобнее работать с минутами – меньше путаницы.

На первом шаге изобразим [**прямоугольную систему координат**](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html), где в подходящем масштабе построим квадрат размером 90 на 90 единиц; при этом одна из вершин квадрата совпадает с началом координат, а его смежные стороны лежат на координатных осях.

Общему множеству исходов будет соответствовать площадь данного квадрата: http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image070.gif Размерность лучше указать в квадратных единицах, поскольку квадратные минуты смотрятся как-то неудачно.

Далее по оси http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image072.gif от начала координат откладываем время погрузки одного автомобиля 15 минут (зелёная линия), а по оси http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image074.gif – время погрузки другого автомобиля 10 минут (красная линия) *(можно наоборот, это не повлияет на решение)*:  
  
Теперь из правого конца зелёного отрезка и из верхнего конца красного отрезка под углом 45 градусов проводим две линии внутри квадрата (малиновые отрезки).

Множеству благоприятствующих исходов (когда автомобили «пересекутся» во времени) соответствует площадь http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image078.gif заштрихованной фигуры. Найдем площади двух прямоугольных треугольников с помощью формулы http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image080.gif, где http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image082.gif – длины катетов. Обратите внимание, что в общем случае эти треугольники **не равны**. У нас: верхний треугольник имеет катеты длиной по 80 единиц (90-10=80), нижний треугольник – по 75 единиц (90-15=75). Таким образом, суммарная площадь треугольников составляет:

http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image084.gif

Из площади квадрата вычитаем площади треугольников, получая тем самым благоприятствующую площадь:

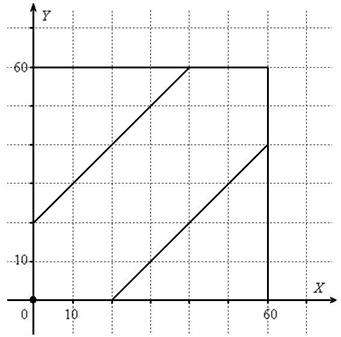
http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image086.gif

По геометрическому определению:

http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image088.gif – вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой.

Ответ: http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image090.gif

**Задача 6.** Студенты случайным образом приходят в столовую с 14.00 до 15.00, при этом обед каждого из них занимает примерно 20 минут. Найти вероятность того, что: а) Коля встретится с Олей во время обеда, б) данная встреча не состоится.

**Решение**: Оля и Коля могут встретиться в течение 60 минут. Выполним чертёж:  
**  
Площадь квадрата *http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image170.gif* соответствует общему числу исходов.  
Рассмотрим [**противоположные события**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html):

*http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image002_0007.gif* – Оля и Коля встретятся во время обеда;

*http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image173.gif* –  данной встречи не состоится.

Вычислим суммарную площадь двух треугольников:  
*http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image175.gif* – данное значение

благоприятствует событию *http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image173_0000.gif*.

По геометрическому определению вероятности:  
*http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image177.gif*  
Противоположные события образуют [**полную группу**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html)**(**встретятся и не встретятся), поэтому:

*http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image179.gif*  
**Ответ**:

В заключение следует отметить, что геометрическое определение вероятности тоже обладает своими недостатками. Один из них заключается в своеобразном парадоксе, давайте вспомним демонстрационный пример с отрезком http://www.mathprofi.ru/m/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti_clip_image011_0001.gif, на который случайным образом падает точка. Возможно ли, что точка попадёт, например, на самый край отрезка? Да, такое событие возможно, но по геометрическому определению, его вероятность равна нулю! И то же самое можно сказать о любой точке отрезка! Дело в том, что с позиций геометрии размеры отдельно взятой точки равны нулю, и поэтому геометрическое определение вероятности здесь не срабатывает.